

基于动态分区的多边形顶点凹凸性判别

吕红波 张树有 程 锦

(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室, 杭州 310027)

摘 要 基于判别顶点对应的边,对平面进行动态分区,形成全正区、全负区和非全正负区,将顶点凹凸性判别转化为后继顶点所在区域位置判别。而全正区、全负区情况只需通过简单判别即可确定顶点的凹凸性,避免乘法运算,其复杂度按概率为 $(n/4)$ 次乘法(n 为多边形顶点数)。试验结果表明,该算法速度快,稳定可靠。

关键词 多边形 顶点凹凸 有向线段 动态分区

中图法分类号: TP391.4 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2004)02-0241-04

Determining Convexo-Concave Vertices of Polygon by Dynamic Distinct Partition

LV Hong-bo, ZHANG Shu-you, CHENG Jin

(State Key Laboratory of CAD&CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

Abstract Polygonal vertices convexo-concave determining is one of the fundamental issues in Computer Graphics. In this paper, plane space is separated into 2 region defined as positive region and negative region based on the direction and the stretched of the line segment. Accordingly transform identification of convexity or concavity of the next vertices into identification of the region position. Consequently the operation of multiplication can be averted. In order to do the best in practical determining, 3 areas is separated of the plane space, whereas not the same as earlier. These area are based on two horizontal lines, two vertical lines and two 45°diagonal lines through the vertices of the line segment. Because the partition is based on the polygon vertices and it has dynamic, therefore it's a dynamic distinct partition. These areas are defined as positive area, negative area or mixed area. In the case of the positive area or the negative area, we can confirm the convexity or concavity of the vertices through simple distinguishing. The result of test indicates it is a simple, highly efficient and reliable algorithm with high speed requires only $(n/4)$ multiplication and $(12n)$ comparisons.

Keywords polygon, convexo-concave vertices, orientation of line, dynamic distinct partition

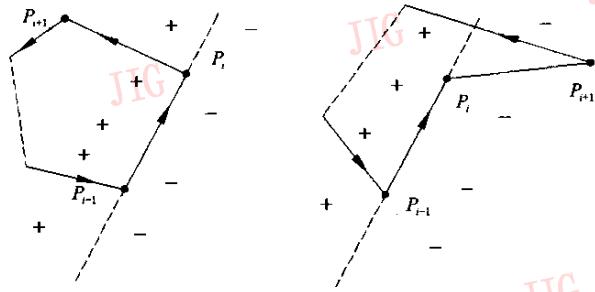
1 引言

多边形凹凸性判别是计算机图形学中基本的算法,在解决复杂几何对象、模式识别、图形图像处理以及机器无碰撞路径规划等问题中都有着重要的应用。国内外学者对此进行了大量的研究^[1~10],归结起来,多边形凹凸性判别方法主要有角度法、凸包法以及位置关系法等方法。角度法通过逐个计算多边形各顶点的内角,比较内角与 π 大小来判别顶点凹凸性。文献[3]、[4]对角度法进行了改进,文献[3]通过有向边与坐标轴夹角的变化来逐个判断顶点的凹凸性,文献

[4]依照一组转化公式计算顶点角度正余弦值的正负和角度所在像限来确定顶点凹凸性。这两种方法在计算量上均为 $O(n)$ 次乘法。凸包法^[5,6]采用分层求凸包的方法交替地筛选出凸点和凹点,其复杂度为 $O(n^2)$ 次乘法。位置关系法算法^[7~10]实质上是计算矢量叉积确定多边形顶点的凹凸性,算法复杂度为 $O(n)$ 次乘法;该算法包括有向面积法和叉积法。本文根据多边形方向和各顶点之间的空间位置关系,提出了一种基于动态区域划分的凹凸性判别的算法。通过对平面空间的区域划分,只需简单的判别,就能确定大部分顶点的凹凸性,避免了叉积运算,有效地提高了判别速度,而且算法实现简单、稳定。

2 顶点凹凸性

平面上任一有向直线将平面分成两个区域,沿着直线方向位于有向线左半侧记为“+”,右半侧为记“-”。简单多边形任一边可当作有向直线,如图 1 所示 $P_{i-1}P_i$ 。判别顶点 P_i 的凹凸性可通过 P_{i+1} 所在 $P_{i-1}P_i$ 分割的区域来确定。显然,如果多边形顶点按逆时针方向排序,当 P_{i+1} 位于 $P_{i-1}P_i$ 的“+”区域时,顶点 P_i 为凸,如图 1(a) 所示;当 P_{i+1} 位于 $P_{i-1}P_i$ 的“-”区域时,顶点 P_i 为凹,如图 1(b) 所示。顶点排序为顺时针时,判别的结果正好相反。因此,可将多边形顶点的凹凸性判别转化为有向边与顶点位置的判别。然而,直接利用 P_{i+1} 来判别在 $P_{i-1}P_i$ 有向边的“+”、“-”区,需进行斜率比较或求叉积,计算量大。



(a) 点 P_{i+1} 在 $P_{i-1}P_i$ 左侧 (b) 点 P_{i+1} 在 $P_{i-1}P_i$ 右侧

图 1 点 P_{i+1} 与有向线段 $P_{i-1}P_i$ 位置关系

3 动态分区

3.1 一次分区

取多边形任一条边 $P_{i-1}P_i$ 的顶点 P_{i-1} 坐标为 (X_{i-1}, Y_{i-1}) , 顶点 $P_i(X_i, Y_i)$ 。设 P_{i-1} 在 P_i 左下方(即 $X_i > X_{i-1}, Y_i > Y_{i-1}$)。令 $X_L = X_{i-1}; X_R = X_i; Y_T = Y_i; Y_B = Y_{i-1}$, 则 X_L, X_R, Y_T, Y_B 将整个平面区域分成 9 个区,如图 2 所示。这 9 个分区域由顶点 P_{i-1} 和 P_i 的位置决定,具有动态性。一次分区的区域分为以下 3 种类型:

(1) 全正区域 如图 2 的 I, II, IV 区,这 3 个区域全为“+”。

(2) 全负区域 如图 2 的 VI, VIII, IX 区,这 3 个区域全为“-”。

(3) 非全正负区域 如图 2 的 III, V, VII 区,这 3 个区中 $P_{i-1}P_i$ 左边半区域为“+”,右边半区域为

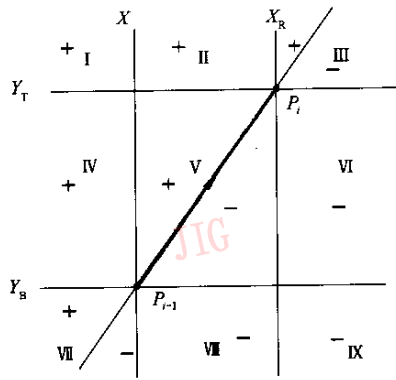


图 2 平面一次分区

“-”。

3.2 二次分区

在一次分区的基础上,对非全正负区再进一步分区。当 $Y_i - Y_{i-1} > X_i - X_{i-1}$ 时,过 P_{i-1}, P_i 点分别作 45° 直线,如图 3 所示,这两条直线将非全正负区分成: III \rightarrow III A, III B; V \rightarrow V A, V B, V C; VII \rightarrow VII A, VII B。

如图 3 所示,二次分区后,从非全正负区进一步分出全正区域: V A, VII A,全负区域: III B, V B。至此,整个平面剩下的 III A, V C, VII B 为非全正负区,而这些区域仅占整个平面极小一部分。

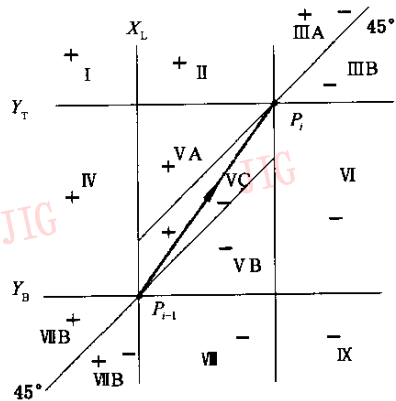


图 3 平面二次分区

4 顶点凹凸性判别原理

经分区后,通过确定 P_{i+1} 点所在区域就可确定顶点 P_i 的凹凸性,大部分区域已分成全正区或全负区, P_{i+1} 是否在这些区域只需进行简单的判别就可确定。

设有 bool 型变量 a, b, c 和 d , 其中 $a = \text{bool}$

$(Y_{i+1} \geq Y_T)$, $b = \text{bool}(Y_{i+1} \geq Y_B)$, $c = \text{bool}(X_{i+1} \geq X_R)$, $d = \text{bool}(X_{i+1} \geq X_L)$ 。当多边形走向为逆时针时,判别方法如下:

(1) 一次分区:

若顶点 P_{i+1} 位于一次分区全正区,则顶点 P_i 判别为凸。

判别式: $a \&\& (!c)$ 为真 // I、II 区

$b \&\& (!d)$ 为真 // IV 区

若顶点 P_{i+1} 位于一次分区全负区,则顶点 P_i 判别为凹。

判别式: $(!a) \&\& c$ 为真 // VI、IX 区

$(!b) \&\& d$ 为真 // VIII 区

(2) 二次分区:

若顶点 P_{i+1} 位于二次分区全正区,则顶点 P_i 判别为凸。

判别式: $(!a) \&\& (!c) \&\& (Y_T - Y_{i+1} \leq X_R - X_{i+1})$ 为真 // VA 区

$(!b) \&\& (!d) \&\& (Y_B - Y_{i+1} \leq X_L - X_{i+1})$ 为真 // VIIA 区

若顶点 P_{i+1} 位于二次分区全负区,则顶点 P_i 判别为凹。

判别式: $a \&\& c \&\& (Y_{i+1} - Y_T \leq X_{i+1} - X_R)$ 为真 // IIIB 区

$b \&\& d \&\& (Y_{i+1} - Y_B \leq X_{i+1} - X_L)$ 为真 // VIB 区

(3) 叉积法:

若顶点 P_{i+1} 位于非正负区,则用常用的叉积法来判别。

令 $C = (P_{i+1} - P_i) \times (P_i - P_{i-1})$

判别式: $C \geq 0$ 顶点 P_i 为凸; $C < 0$ 顶点 P_i 为凹。

实际判别时,一般顶点只要通过一次分区和二次分区判别就可确定它的凹凸性。

对于顺时针走向的多边形,判别的结果取反即可。

有向边 $P_{i-1}P_i$ 可能存在如图 4 的 4 种情形,图 4(a) 中 P_{i-1} 位于 P_i 左下方。为便于统一描述,在进行一次分区前,当 $P_{i-1}P_i$ 为图 4(b)、图 4(c)、图 4(d) 的情形时,只需将坐标进行简单变换,即转换成图 4(a) 的情形,如图 4(b) 将 $P_i(X_i, Y_i) \rightarrow P_i(-X_i, -Y_i)$ 变换,图 4(c)、图 4(d) 作类似变换。二次分区前,如果 $(Y_i - Y_{i-1} < X_i - X_{i-1})$ 则将 $P_i(X_i, Y_i) \rightarrow P_i(Y_i, X_i)$ 对称变换。

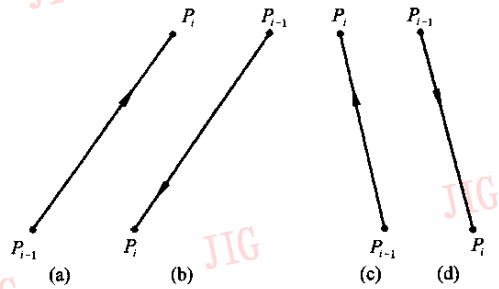


图 4 有向边的 4 种互异位置

5 算法描述

输入:按一定方向排列的多边形顶点 $P_i(X_i, Y_i)$ ($i=0, 1, 2, \dots, n-1$), n 为顶点数。

输出:点 P_i 的凹凸性。

(1) IF $n=2$, 则 3 顶点为凸判别结束。

(2) IF $(!(X_i \geq X_{i-1}) \&\& (Y_i \geq Y_{i-1}))$ 进行坐标变换。

(3) 进行一次分区

IF $(a \&\& (!c) \&\& (b \&\& (!d)))$ (输出顶点 P_i 为凸,开始下一顶点的判别);

ELSE IF $((!a) \&\& c \&\& (!b) \&\& d)$ (输出顶点 P_i 为凹,开始下一顶点的判别);

(4) 进行二次分区

IF $(!b) \&\& (!d) \&\& (Y_B - Y_{i+1} \leq X_L - X_{i+1})$ (输出顶点 P_i 为凸,开始下一顶点的判别);

ELSE IF $(!a) \&\& (!c) \&\& (Y_T - Y_{i+1} \leq X_R - X_{i+1})$ (输出顶点 P_i 为凸,开始下一顶点的判别);

ELSE IF $(a \&\& c \&\& (Y_{i+1} - Y_T \leq X_{i+1} - X_R))$ (输出顶点 P_i 为凹,开始下一顶点的判别);

ELSE IF $(b \&\& d \&\& (Y_{i+1} - Y_B \leq X_{i+1} - X_L))$ (输出顶点 P_i 为凹,开始下一顶点的判别);

(5) 上述分区未能判别出凹凸,则进行叉积运算,令 $C = (P_{i+1} - P_i) \times (P_i - P_{i-1})$,

IF $(C \geq 0)$ (输出顶点 P_i 为凸);

ELSE (输出顶点 P_i 为凹);

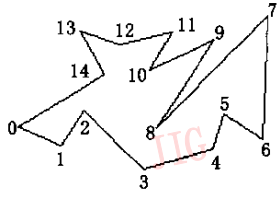
(6) $i=i+1$; 重复判断过程直到 $i=n$ 。

(7) 假设检验:如果 Y 分量最大的顶点为凹顶点,则将判断的凸顶点改为凹,凹顶点改为凸。

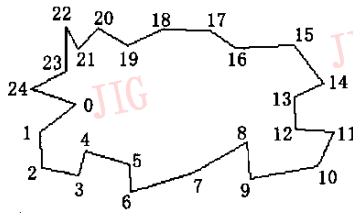
6 计算效率分析

平面区域二次动态分区后,全正区和全负区占

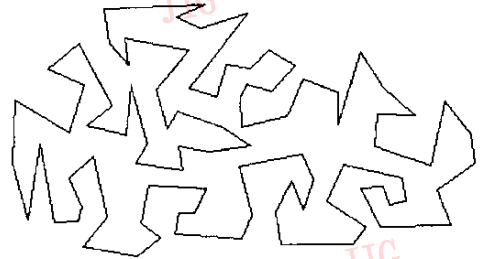
整个平面域的 $7/8$ 左右, 这样一般顶点只需通过简单判别就能确定的顶点凹凸性, 而只有少数的顶点需要通过叉积运算来判别。图 5 给出了任取的由 15 个顶点、25 个顶点和 90 个顶点构成的多边形, 本算法与角度法、凸包法叉积法顶点凹凸判别计算结果比较如表 1 所示。



(a) 15 个点



(b) 25 个点



(c) 90 个点

图 5 任取不同顶点数的多边形

从以上比较可知, 基于动态分区的凹凸判别算法比经典算法平均提高效率 50% 以上。由于顶点凹凸性判别算法为基础算法, 在图形处理中往往需要大量的反复调用, 因此, 在实际应用中提高效率十分明显。

7 结 论

多边形顶点凹凸性判别在 CG/CAD 中起着重要的作用。本文通过动态二次分区, 将平面分成全正区、全负区和非全正负区, 将顶点凹凸性判别转化为后继顶点所在区域位置判别, 全正区、全负区情况只需通过简单判别即可确定顶点的凹凸性, 避免乘法运算, 其复杂度按概率为 $(n/4)$ 次乘法 (n 为多边形顶点数)。试验结果表明该算法速度快, 稳定可靠。该算法不仅可以用于多边形方向和顶点凹凸性判别, 而且也可以用于多边形内外点判别、平面点集凸壳求取等算法中。

参 考 文 献

- 1 Sobbkow M S, Pospisill P, Yong Y H. A fast two dimensional line clipping algorithm Via line encoding [J]. Computers and Graphics, 1987, 11(4): 459~467.
- 2 Feito F R, J C Torres. A Urena: Orientation, simplicity, and inclusion test for planer polygon [J]. Computers & Graphics, 1995, 19(4): 595~600.
- 3 路全胜, 冯辛安. 平面多边形凹凸性的角度判别法 [J]. 计算机辅助设计与制造, 1995, (2): 38~41.
- 4 万书亭, 韩庆瑶. 平面多边形凹凸性的顶角判别法 [J]. 水利电力机械, 2000, (4): 6~8.

表 1 算法效率比较结果(重复次数为 1 000 000 次)

顶点个数	角度法 (改进)(s)	凸包法 (s)	叉积法 (s)	本算法 (s)	本算法平均 提高(%)
15	5.457	8.061	3.114	2.032	63.35
25	7.151	10.445	4.306	3.265	55.28
90	17.145	26.048	12.548	9.424	50.26

- 5 周培德. 确定任意多边形凸凹顶点的算法 [J]. 软件学报, 1995, 6(5): 275~279.
- 6 许如初, 张智平. 确定任意多边形顶点凹凸性的快速算法 [J]. 华中理工大学学报, 1997, 25(1): 103~104.
- 7 金文华, 唐卫清, 唐荣锡. 简单多边形顶点凹凸性的快速确定算法 [J]. 工程图学学报, 1998, (1): 66~70.
- 8 马小虎, 潘志度, 石教英. 确定多边形凸凹顶点的快速算法及其应用 [J]. 计算机工程与设计, 1998, 19(3): 45~49.
- 9 刘润涛. 任意多边形顶点凸、凹性判别的简捷算法 [J]. 软件学报, 2002, 13(7): 1309~1312.
- 10 陈炳发, 钱志峰, 廖文和. 简单多边形凹凸性自识别算法 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2002, 14(3): 214~217.



吕红波 1978 年生, 2000 年于燕山大学获机械工程学士学位, 现为浙江大学工程及计算机图形学研究所硕士研究生。主要研究方向为计算机图形学和计算机辅助设计。



张树有 1963 年生, 教授, 博士生导师, 浙江大学工程及计算机图形学研究所副所长, 1999 年于浙江大学获应用数学专业博士学位。主要研究领域为计算机图形学、计算机辅助设计以及虚拟装配等。



程锦 1978 年生, 1999 年于江苏理工大学获机械工程专业学士学位, 现为浙江大学工程及计算机图形学研究所博士研究生。主要研究方向为计算机图形学和计算机辅助设计。